<table>
<tr><td colspan="3">

Τάξη Α΄Λυκείου

Διδακτική Ενότητα: Διάταξη των πραγματικών αριθμών.

Σχολικό βιβλίο, Μαθηματικά α΄Λυκείου,

</td></tr>
<tr><td>Στόχοι</td><td>Θεματικές Ενότητες

(διατιθέμενος χρόνος)</td><td>Ενδεικτικές δραστηριότητες</td></tr>
<tr><td>Πρ5. Διερευνούν την έννοια της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Αναπαριστούν στον άξονα των πραγματικών αριθμών σύνολα που προσδιορίζονται από ανισοτικές σχέσεις και τα συμβολίζουν χρησιμοποιώντας διαστήματα.</td><td>(2ώρες)</td><td>

- Γιατί η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι άρρητος;

Προβληματίζονται σχετικά με τους τρόπους με τους οποίους αποδεικνύεται ότι ένας ισχυρισμός δεν ισχύει.

0,999999999999999………..=1

- Ανέκδοτο: Ένας τρελός βλέποντας κάποιον άλλον τρελό να βρει την άκρη από ένα κουβάρι, του λέει υποτιμητικά:

-Μην ψάχνεις να βρεις την άκρη!... Την έχω κόψει!

Το παραπάνω ανέκδοτο έχει εφαρμογή αν στο διάστημα [0,1] κόψουμε (αφαιρέσουμε το δεξί του άκρο , το 1 και πάρουμε το σύνολο [0,1) ;

- Να βρείτε 9 ρητούς αριθμούς ανάμεσα στο 1,4 και 1,5
- Να βρείτε ακόμα 9 ρητούς αριθμούς ανάμεσα στο 1,43 και στο 1,44
- Περιγράψτε μια τεχνική που να μπορώ να βρω ανάμεσα στον 1,3 και στον 1,4 9^6 άλλους ρητούς δεκαδικούς
- Ανάμεσα στον $\frac{5}{8}$ $\mathit{και}$ $\frac{7}{8}$ βρείτε έναν ακόμη ρητό

</td></tr>
</table>

		• Μπορείτε να βρείτε ρητό ανάμεσα σε $\frac{3}{7}$ *και* $\frac{4}{7}$;

Προϋπάρχουσες Γνώσεις και Ιδέες των Μαθητών:

- Ισοδύναμα κλάσματα. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό και το κλάσμα διατηρείται ίσο με το αρχικό. Το αντίστροφο είναι η απλοποίηση.
- Όσες φορές κι αν κόψεις την άκρη από ένα κουβάρι, η άκρη θα παραμείνει «άκρη» .
- Το σχήμα 0,999999999999…..(επ΄άπειρον) είναι ένα σχήμα που παριστάνει έναν αριθμό που πλησιάζει οσοδήποτε κοντά στο 1, αλλά «ουδέποτε» γίνεται ίσο με 1 .

Τεχνική διάγνωσης:

- Ερωτήσεις και στο τέλος διήγηση του ανεκδότου!

- **Εννοιολογικές δυσκολίες:** Το άπειρο γενικώς είναι μια έννοια για την οποία η διαισθητική προσέγγιση δίνει λανθασμένα συμπεράσματα. Υπό την έννοια αυτή , έχει επιστημολογικά και γνωστικά εμπόδια μέγιστα, τα ίδια που αντιμετώπισαν και υπέλαμπρα μαθηματικά μυαλά όπως ο Φ. Γκάους που έκαναν λάθος με τις διαισθητικές τους προσεγγίσεις και την «κοινή λογική» Και αφού έκανε λάθος /η ο Γκάους, όλοι μπορούν να κάνουν, πόσο δε μάλλον οι μικροί μαθητές.! Ωστόσο, είναι προκλητική η προσπάθεια τιθάσευσης αυτή της έννοιας, παρ΄ όλες τις διδακτικές και επιστημολογικές της δυσκολίες.
- Διάκριση ρητών –αρρήτων , αφού και οι ρητοί δύναται να έχουν άπειρο πλήθος ψηφίων (περιοδικοί) μιας και η δεκαδική έκφραση των ρητών δεν είναι μονοσήμαντη αφού λ.χ. 2,35=2,3499999999999……
- Το πλήθος των τερματιζόμενων διαιρέσεων (:=δεκαδικοί τερματιζόμενοι) είναι μηδενικό (%) σε σχέση με τις μη τερματιζόμενες. Καλό είναι να θυμηθούν οι μαθητές, ότι οι τερματιζόμενες διαιρέσεις (ομιλούμε πάντα για ρητούς) είναι μόνο οι της μορφής :

$\frac{a}{2^{\mu}\cdot 5^{\nu}}$ **(1) (για ανάγωγο κλάσμα)**

Αυτό μπορεί να εξηγηθεί στην Α΄Λυκείου με συγκεκριμένα παραδείγματα, όπου η δύναμη του 2 είτε του 5 στον παρονομαστή, με χρήση ισοδυνάμων κλασμάτων, οδηγεί σε ίσο κλάσμα που έχει ως παρονομαστή δύναμη του 10, δηλ. το αποτέλεσμα της διαίρεσης είναι ο ακέραιος αριθμός α, στον οποίο έχουμε βάλλει υποδιαστολή σε πλήθος ψηφίων από τα δεξιά προς τα αριστερά όσο και η δύναμη του 10.

- Στην ζωή μας καθημερινά λοιπόν χρησιμοποιούμε ρητούς , όχι άρρητους που έχουν άπειρο πλήθος ψηφίων μη περιοδικό και άγνωστο σε όλους. Απ΄ αυτούς τους ρητούς, χρησιμοποιούμε μια ελάχιστη υποκλάση τους καθημερινά, τους δεκαδικούς τερματιζόμενους, μηδενικού ποσοστού % σε σχέση με τους ρητούς όλους.
- Πρακτικά η πιθανότητα να τερματίζεται μια τυχαία διαίρεση ακεραίου δια ακεραίου, είναι 0 , κάτι που προκύπτει από Ανώτερα μαθηματικά (Θεωρία Μέτρου πιθανότητες γεωμετρικές) που ωστόσο, μπορούν να αντιληφθούν οι μαθητές, αν δουν τον τύπο (1) και για το α έχουν την γνώση των δύο προτάσεων του Ευκλείδους ότι α) «Κάθε ακέραιος γράφεται κατά μονοσήμαντο τρόπο ως γινόμενο πρώτων» και β) οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι στο πλήθος.
- Το $\sqrt{2}$ είναι μεν άρρητος (= μη εκφράσιμος , μη περιγράψιμος μη λεκτέος, ανείπωτος, άφατος, πλην μπορεί να κατασκευασθεί με κανόνα και διαβήτη και να τοποθετηθεί στον άξονα των πραγματικών.
- Το $\sqrt{2}$ λέγεται μεν ότι είναι άρρητος και ότι κανένας δεν μπορεί να ξέρει το πλήθος των ψηφίων του, όμως εμείς μπορούμε να τον πολλαπλασιάσουμε με τον εαυτό του και να βρούμε τον ακέραιο 2. Άρα είναι προσιτός, περιγράψιμος και διαχειρίσιμος.
- Η απόδειξη ότι δεν υπάρχει πιο μεγάλος πραγματικός (ή ρητός) κάτω από το 1 , είναι μεν απόδειξη με την εις άτοπον απαγωγή (δι΄ αντιπαραδείγματος) αλλά δεν πείθει την έντονη διαίσθησή μου, ότι αν από το [0,1] «κόψω» ,«αφαιρέσω» το 1 και πάρω το μαθηματικό αντικείμενο [0,1) δεν θα έχω δεξί άκρο. Μοιάζει με το ανέκδοτο με τον τρελό που προσπαθούσε να πείσει τους άλλους να μην ψάχνουν βρουν την άκρη του νήματος από το κουβάρι, διότι την έχει….κόψει!

Στόχοι:

Γνώσεις

- Κάθε ρητός δεκαδικός τερματιζόμενος, έχει και άλλη μία έκφραση με άπειρα εννιάρια
- Μετατροπή δεκαδικού περιοδικού σε ρητή έκφραση ως κλάσμα.
- Μεταξύ δύο ρητών υπάρχουν τελικά όσοι ρητοί θέλουμε, απεριόριστα, δηλ. άπειροι.
- Εφαρμογή της εις άτοπον απαγωγής δι αντιπαραδείγματος

Δεξιότητες

- Να μετατρέπουν οποιονδήποτε τερματιζόμενο δεκαδικό σε περιοδικό με περίοδο το 9
- Να μετατρέπουν δεκαδικό περιοδικό σε ρητή έκφραση κλάσματος

Στάσεις :

- Τα μαθηματικά δεν έχουν καμία σχέση με την λογιστική αλλά είναι κάτι πολύ παραπάνω ποιοτικά.
- Η γνώση της φύσης των αριθμών έχει βάθος και τα μαθηματικά εν τέλει είναι γοητευτικά.

Οριζόντιες ικανότητες

- Ανάπτυξη ικανότητας της αντίληψης αριθμού μέσω πολλαπλής αναπαράστασης (κλάσμα, δεκαδικός τερματιζόμενος , περιοδικός , άρρητος , άρρητος κατασκευαζόμενος

Θέματα /Δραστηριότητες	**Χρονική Διάρκεια**	**Εκπαιδευτικές Τεχνικές**	**Μέσα διδασκαλίας.**
Διάγνωση πρότερων γνώσεων και ιδεών	15΄	Ερωτήσεις-απαντήσεις	Πίνακας
Υπενθύμιση προαπαιτούμενων γνώσεων ✓ Ισοδύναμα κλάσματα ✓ 2,4=2,40=2,400= κ.ο.κ.	5΄	Ερωτήσεις-απαντήσεις	Πίνακας
Υποκίνηση ενδιαφέροντος για την διάταξη των ρητών και πραγματικών ✓ Διήγηση του ανεκδότου και σύντομη ψηφοφορία αν είναι δυνατόν να συμβαίνει αλλιώς	2΄	Ερώτηση για το εάν κάποιος διαφωνεί.	-
Άσκηση I: Βρείτε έναν αριθμό που βρίσκεται ανάμεσα στους: α) 2,34 και 2,36 β) $\frac{4}{11}$ $και$ $\frac{6}{11}$ γ) 2,34 και 2,35 δ) $\frac{4}{11}$ $και$ $\frac{5}{11}$	10΄	Εργασία σε ομάδες των 4 μαθητών (Ανά 2 θρανία)	Φύλλο εργασίας

ε) Πόσους ρητούς μπορούμε να βρούμε ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς ή κλάσματα;			
Άσκηση ΙΙ : α)Αν α<β τότε $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ β) Αν βάλουμε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τους α και β , τι θέση θα έχει το $\frac{\alpha+\beta}{2}$; Άσκηση ΙΙΙ : Σχεδιάστε τον άξονα των πραγματικών και βάλτε τους αριθμούς -4,-3,-2,-1,0, +1, +2 , +3, +4 α) Πόσες μονάδες απέχει το 1 από το 2; Β) Πόσες μονάδες απέχει το 1 από το 3 ; Γ) Πόσες μονάδες απέχει το 0 από το 3; Δ) Το 3,5 από το 3; Ε) το 0,8 από το 0,3; Στ) -4 από το +4; Ζ) το -4 από το 0; Η) Το ¼ από το 1/5; Θ) το α από το β; Ι) Ισαπέχει το $\frac{\alpha+\beta}{2}$ από τα α και β;	13΄	Εργασία σε ομάδες των 4 μαθητών (Ανά 2 θρανία)	Φύλλο εργασίας
Επίλυση προβλήματος: Ένας βασιλιάς, βάζει το εξής πρόβλημα: «Χαρίζω όλο το Βασίλειό μου, σε	45΄	Επίλυση από όλη την τάξη που θα είναι χωρισμένη	(Πίνακας και φύλλο εργασίας) Κονστρουκτιβιστική προσέγγιση με διαπραγμάτευση των πιθανών

όποιον μπορέσει να μου δώσει την πιο μεγάλη αξία που είναι μικρότερη από 1€!» Ο Βασιλιάς δεν τρελάθηκε ξαφνικά για να χαρίσει το Βασίλειό του στον πρώτο που θα του επέλυε το πρόβλημα! Επομένως που βασίζεται;		σε ομάδες και η κάθε ομάδα θα δίνει επί μέρους απαντήσεις που θα διαπραγματεύονται μεταξύ τους και με την καθοδήγηση του διδάσκοντα.	απαντήσεων των μαθητών: • 99 λεπτά του Ευρώ. Συζήτηση για την απόρριψη. Δεν υπάρχει υποδιαίρεση μικρότερη από 1 λεπτό του ευρώ, όμως το πρόβλημα λέει για «αξία» Και αξία δεν έχουν μόνο τα λεπτά, έχουν και τα προϊόντα. Αν δεχθούμε ότι το ένα κιλό ζάχαρη κοστίζει 1€, τότε 999gr ζάχαρης κοστίζουν 0,999€ και ενώ δεν έχουμε υποδιαίρεση κάτω από 1 λεπτό, η αξία υπάρχει. • Και τότε όμως 1 κόκκος ζάχαρης που ζυγίζει πολύ λιγότερο από 1 gr, γίνει μεγαλύτερη αξία χωρίς

			να φθάνει το 1 Kgr. • Αν 1 κόκκος ζάχαρης ξεπερνά ή φθάνει το 1 kgr, έχουμε περιθώριο το ένα μόριο ζάχαρης. Ως γνωστόν, έχει χημικό τύπο $C_{11}H_{22}O_{11}$ και μοριακή μάζα 11X12 + 22X1 +11 X16 =330 Άρα τα 330 gr αποτελούνται από $6,023*10^{23}$ (=N)μόρια έκαστο των οποίων ζυγίζει 330gr/N (Αριθμός Avogadro) δηλ. $5,5*10^{-22}$ • Το 0,9999999….=1 • Αν α **<u>ο μέγιστος</u>** αριθμός πριν το 1, τότε α<1 και σύμφωνα με την άσκηση ΙΙα) θα ίσχυε $a < \frac{a+1}{2} < 1$

			άτοπο, γιατί ο α είναι ο μέγιστος πριν το 1 και βρήκαμε «πιο…μέγιστο!»

Δοκιμασία αξιολόγησης
Τάξη Α΄ Λυκείου. Χρόνος (15΄)
Διδακτικής ενότητα «Πυκνότητα ρητών και πραγματικών αριθμών»

Ονοματεπώνυμο:……………………………………………………………………………

Άσκηση 1

Γράψτε σε μια σειρά τους παρακάτω αριθμούς ξεκινώντας από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο:

4	-3	5	$\sqrt{2}$	1,41	0	1,42	2	0,9999…	

Άσκηση 2

Να παρεμβάλετε ανάμεσα στους 2,5 και 2,6 , εννέα άλλους δεκαδικούς.

Να παρεμβάλλετε 99 άλλους δεκαδικούς.

Άσκηση 3

Να παρεμβάλλετε ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{7}{13}$ *και* $\frac{8}{13}$ άλλα 99 κλάσματα.

Μπορεί αυτό να συνεχιστεί επ΄ άπειρον; Δώστε μια εξήγηση.